

ANOVA (Fortsetzung)

Vitaly Belik

Institut für Veterinär-Epidemiologie und Biometrie, FU Berlin

1/12/2020

- ▶ ANCOVA
- ▶ Factorial ANOVA with repeated measures
- ▶ Mixed designs
- ▶ Multi-level models

Beispiel (Viagra)

Table 1: Viagra-Datensatz [A. Field]

person	dose	libido
1	1	3
2	1	2
3	1	1
4	1	1
5	1	4
6	2	5
7	2	2
8	2	4
9	2	2
10	2	3
11	3	7
12	3	4
13	3	5
14	3	3
15	3	6

Beispiel (Viagra) (1)

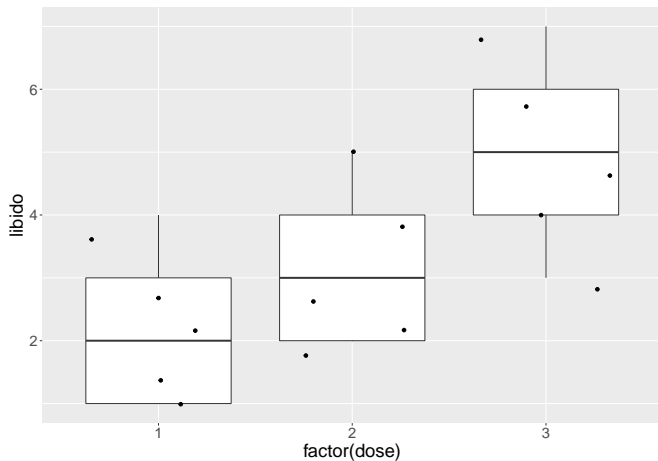


Figure 1: Viagra-Datensatz mit Konfidenzintervallen

Die Antwortvariable (*response*) ist kontinuierlich und die unabhängigen Variablen (*Faktoren*) kategoriell.

- ▶ ANOVA kann und soll als GLM (verallgemeinerte *Regression*) betrachtet werden.

Einfache ANOVA: eine erklärende (kategoriale) Variable (Faktor).

- ▶ F -Test prüft ob Unterschiede zwischen den Gruppen vorliegen
- ▶ Test für Homogenität der Varianz (Levene's Test)
- ▶ Kontraste
- ▶ post hoc-Tests für paarweise Vergleiche. Bonferroni und Tukey.

Einfache ANOVA mit wiederholten Messungen (repeated measures)

Einfache ANOVA mit wiederholten Messungen (repeated measures)

Bis jetzt haben wir *unabhängige* ANOVA betrachtet. Alle Messungen stammten von verschiedenen Individuen (Objekten).



Figure 2: Ich bin ein Star: holt mich hier raus! [Quelle: RTL]

Beispiel (1)

Table 2: Dschungel-Datensatz [A. Field]

participant	stick_insect	kangaroo_testicle	fish_eye	witchetty_grub
P1	8	7	1	6
P2	9	5	2	5
P3	6	2	3	8
P4	5	3	1	9
P5	8	4	5	8
P6	7	5	6	7
P7	10	2	7	2
P8	12	6	8	1

Einfache ANOVA mit wiederholten Messungen (repeated measures) (1)

Falls die Messungen von den gleichen Individuen (Objekten) stammen, braucht man die ANOVA mit *wiederholten Messungen (repeated measures)*.

Somit ist die Annahme des F-Test über die unabhängige Messungen ist nicht mehr gültig.

Dabei kann man weiter den F-Test benutzen, wenn die Annahme der *Spherizität* erfüllt ist.

Sphärität bezieht sich auf die Gleichheit der Varianzen der Differenzen zwischen den Niveaus der Messungen. Daher braucht man mindestens 3 Messniveaus um sich überhaupt mit Sphärität zu befassen.

Um die Daten auf Sphärität zu prüfen, nutzt man den *Mauchly-Test*

Der *Mauchly-Test* überprüft die Hypothese, dass die Varianzen gleich sind. Falls der Test signifikant ist, sind die Varianzen nicht gleich.

Sphärität bereitet auch Probleme bei post hoc-Test. Dabei ist Bonferroni-Methode verlässlicher als Tukey-Test.

Sphärität-Korrekturen

Falls Sphärität nicht erfüllt ist, nimmt man Korrekturen in den Freiheitsgraden für das F -Verhältnis.

- ▶ Greenhouse-Geisser-Korrektur
- ▶ Huynh-Feldt-Korrektur

Des weiteren kann man hierarchisches Modell benutzen, indem man die Messwerte von gleichen Individuen zu einem Hierarchieebene zusammenfügt.

Repeated measures ANOVA: Theorie

Im Falle einfacher unabhängiger ANOVA

$$SS_T = SS_M + SS_R.$$

Dabei m ist die Anzahl verschiedener Gruppen

$$SS_M = \sum_{k=1}^m n_k (\bar{x}_k - \bar{x}_{\text{grand}})^2$$

und n_k ist die Größe der Gruppen ($df = m - 1$)

$$SS_R = \sum_{i=1}^n n_k (\bar{x}_{ik} - \bar{x}_k)^2 = \sum_{k=1}^m s_{\text{group},k}^2 (n_k - 1)$$

und $df_R = df_{\text{total}} - df_M$, $df_{\text{total}} = n - 1$.

Repeated measures ANOVA: Theorie (1)

Im Falle einfacher ANOVA mit wiederholten Messungen

$$SS_T = SS_B + SS_W.$$

wobei

SS_B - Quadratensumme für die Unterschiede zwischen (**between**) den Individuen

SS_W - Quadratensumme für die Unterschiede innerhalb (**within**) der Individuen

Es folgt

$$SS_B = SS_T - SS_W.$$

Repeated measures ANOVA: Theorie (2)

$$SS_W = \sum_{i=1}^N s_{\text{person},i}^2 (n_i - 1)$$

wobei n_i - Anzahl der Messungen, die dem Individuum i entsprechen (Anzahl der Niveaus). Insgesamt haben wir N Individuen.

$$df = (m - 1) \cdot N.$$

$$SS_R = SS_W - SS_M$$

$$\text{und } df_R = df_W - df_M.$$

F -Verhältnis ist wie gewöhnt berechnet

$$F = \frac{MS_M}{MS_R}$$

wobei $MS_M = SS_M/df_M$ und $MS_R = SS_R/df_R$.

Zerlegung der Varianzen

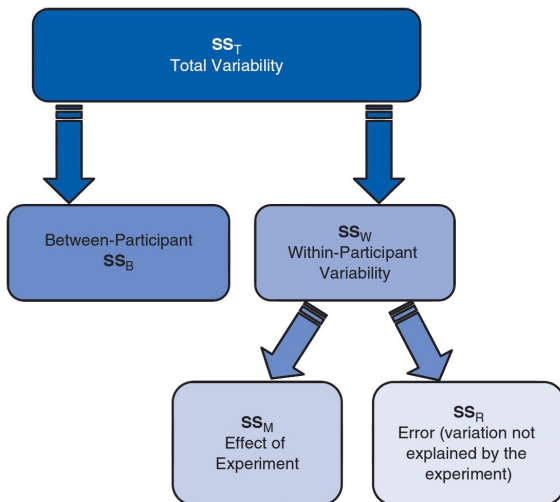


Figure 3: Zerlegung der Varianzen für ANOVA mit wiederholten Messungen [A. Field]

Table 3: Dschungel-Datensatz [A. Field]

Participant	Animal	Time
P1	stick_insect	8
P2	stick_insect	9
P3	stick_insect	6
P4	stick_insect	5
P5	stick_insect	8
P6	stick_insect	7
P7	stick_insect	10
P8	stick_insect	12
P1	kangaroo_testicle	7
P2	kangaroo_testicle	5
P3	kangaroo_testicle	2
P4	kangaroo_testicle	3
P5	kangaroo_testicle	4
P6	kangaroo_testicle	5
P7	kangaroo_testicle	2
P8	kangaroo_testicle	6
P1	fish_eye	1
P2	fish_eye	2
P3	fish_eye	3
P4	fish_eye	1
P5	fish_eye	5
P6	fish_eye	6
P7	fish_eye	7
P8	fish_eye	8
P1	witchetty_grub	6
P2	witchetty_grub	5
P3	witchetty_grub	8
P4	witchetty_grub	9
P5	witchetty_grub	8
P6	witchetty_grub	7
P7	witchetty_grub	2
P8	witchetty_grub	1

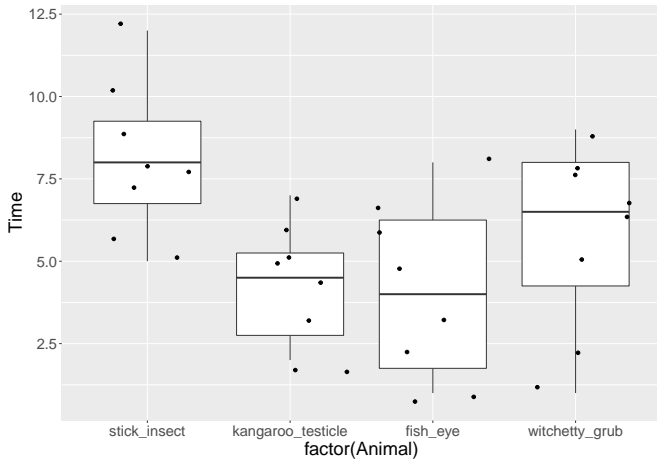


Figure 4: Dschungel-Datensatz [A. Field]

Deskriptive Statistik

```
## longBush$Animal: stick_insect
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##   8.0000000  0.0000000  0.0000000  5.0000000  12.0000000  7.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean  CI.mean.0.95  var
##   65.0000000  8.0000000  8.1250000  0.7891564  1.8660584  4.9821429
##   std.dev  coef.var
##   2.2320714  0.2747165
## -----
## longBush$Animal: kangaroo_testicle
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##   8.0000000  0.0000000  0.0000000  2.0000000  7.0000000  5.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean  CI.mean.0.95  var
##   34.0000000  4.5000000  4.2500000  0.6477985  1.5318000  3.3571429
##   std.dev  coef.var
##   1.8322508  0.4311178
## -----
## longBush$Animal: fish_eye
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##   8.0000000  0.0000000  0.0000000  1.0000000  8.0000000  7.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean  CI.mean.0.95  var
##   33.0000000  4.0000000  4.1250000  0.9716977  2.2977000  7.5535714
##   std.dev  coef.var
##   2.7483761  0.6662730
## -----
## longBush$Animal: witchetty_grub
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##   8.0000000  0.0000000  0.0000000  1.0000000  9.0000000  8.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean  CI.mean.0.95  var
##   46.0000000  6.5000000  5.7500000  1.0307764  2.4373989  8.5000000
##   std.dev  coef.var
##   2.9154759  0.5070393
```

Kontraste

Positive Zahlen werden mit negativen verglichen. Null bedeutet, dass die Gruppe im Vergleich nicht vorkommt.

```
knitr::kable(contrasts(longBush$Animal))
```

	PartsvsWhole	KengvsEye	StickvsGrub
stick_insect	1	0	-1
kangaroo_testicle	-1	-1	0
fish_eye	-1	1	0
witchetty_grub	1	0	1

```

## $ANOVA
##      Effect DFn DFd      SSn      SSd      F      p p<.05      ges
## 1 (Intercept)  1   7 990.125  17.375 398.899281 1.973536e-07 * 0.8529127
## 2      Animal  3  21  83.125 153.375   3.793806 2.557030e-02 * 0.3274249
##
## $`Mauchly's Test for Sphericity`
##      Effect      W      p p<.05
## 2 Animal 0.136248 0.04684581 *
##
## $`Sphericity Corrections`
##      Effect      GGe      p[GG] p[GG]<.05      HFe      p[HF] p[HF]<.05
## 2 Animal 0.5328456 0.06258412      0.6657636 0.04833061 *

```

Greenhouse-Geisser-Korrektur (konservativ) und *Huynh-Feldt-Korrektur* sind zu beachten. Sphärität ist nicht erfüllt.

Es folgt, dass die Art des Tieres einen wesentlichen Einfluß auf die Zeit hat. Der *F*-Test (falls überhaupt signifikant) sagt uns nicht welche Tiere sich von einander unterscheiden.

post hoc-Tests

```
##  
## Pairwise comparisons using paired t tests  
##  
## data: longBush$Time and longBush$Animal  
##  
##          stick_insect kangaroo_testicle fish_eye  
## kangaroo_testicle 0.0121      -            -  
## fish_eye          0.0056      1.0000      -  
## witchetty_grub   1.0000      1.0000      1.0000  
##  
## P value adjustment method: bonferroni
```


Repeated Measures ANOVA als hierarchisches Modell

- ▶ Wichtige Annahme der Regression ist die Unabhängigkeit der Residuen.
- ▶ Wiederholte Messungen beinhalten abhängige Werte, und deshalb führen zu abhängigen Residuen.
- ▶ Hierarchisches Modell (multilevel model) ist eine Verallgemeinerung der Regression, dass die Abhängigkeiten in den Daten berücksichtigt.

```
library(nlme)
jungle_ml <- lme(Time~Animal, random = ~1|Participant/Animal, data = longBush, method = "ML")
```

- ▶ Der Funktion wird beigebracht, dass die Variable "Animal" aus derselben Teilnehmern besteht.

Repeated Measures ANOVA als hierarchisches Modell (1)

Um das Effekt von "Animal" festzustellen, erzeugen wir ein anderes Modell ohne den Prädiktor.

```
library(nlme)
jungle_ml_0 <- lme(Time ~ 1, random = ~1|Participant/Animal, data = longBush, method = "ML")
```

Jetzt vergleichen wir beide Modelle

```
anova(jungle_ml_0, jungle_ml)
```

```
##           Model df      AIC      BIC   logLik   Test  L.Ratio p-value
## jungle_ml_0     1  4 165.0875 170.9504 -78.54373
## jungle_ml       2  7 158.3949 168.6551 -72.19747 1 vs 2 12.69253 0.0054
```

Repeated Measures ANOVA als hierarchisches Modell (2)

```
summary(jungle_ml)
```

```
## Linear mixed-effects model fit by maximum likelihood
## Data: longBush
##      AIC      BIC    logLik
## 158.3949 168.6551 -72.19747
##
## Random effects:
## Formula: ~1 | Participant
##      (Intercept)
## StdDev: 7.756253e-05
##
## Formula: ~1 | Animal %in% Participant
##      (Intercept) Residual
## StdDev: 2.309935 0.01176165
##
## Fixed effects: Time ~ Animal
##      Value Std.Error DF   t-value p-value
## (Intercept) 5.5625 0.4365423 21 12.742178 0.0000
## AnimalPartsvsWhole 1.3750 0.4365423 21 3.149752 0.0048
## AnimalKengvsEye -0.0625 0.6173641 21 -0.101237 0.9203
## AnimalStickvsGrub -1.1875 0.6173641 21 -1.923500 0.0681
## Correlation:
##      (Intr) AnmlPW AnmlKE
## AnimalPartsvsWhole 0
## AnimalKengvsEye 0 0
## AnimalStickvsGrub 0 0 0
##
## Standardized Within-Group Residuals:
##      Min      Q1      Med      Q3      Max
## -0.0104701088 -0.0046839960 0.0001377646 0.0041329377 0.0085414045
##
## Number of Observations: 32
## Number of Groups:
##      Participant Animal %in% Participant
##      8 32
```

Repeated Measures ANOVA als hierarchisches Modell (3)

```
library(multcomp)
postHocs <- glht(jungle_ml, linfct = mcp(Animal = "Tukey") )
summary(postHocs)

##
## Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses
##
## Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts
##
##
## Fit: lme.formula(fixed = Time ~ Animal, data = longBush, random = ~1 |
## Participant/Animal, method = "ML")
##
## Linear Hypotheses:
##
## Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## kangaroo_testicle - stick_insect == 0 -3.875 1.155 -3.355 0.00414 **
## fish_eye - stick_insect == 0 -4.000 1.155 -3.463 0.00315 **
## witchetty_grub - stick_insect == 0 -2.375 1.155 -2.056 0.16767
## fish_eye - kangaroo_testicle == 0 -0.125 1.155 -0.108 0.99955
## witchetty_grub - kangaroo_testicle == 0 1.500 1.155 1.299 0.56374
## witchetty_grub - fish_eye == 0 1.625 1.155 1.407 0.49492
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## (Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Repeated Measures ANOVA als hierarchisches Modell (4)

```
confint(postHocs)
```

```
##  
## Simultaneous Confidence Intervals  
##  
## Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts  
##  
##  
## Fit: lme.formula(fixed = Time ~ Animal, data = longBush, random = ~1 |  
## Participant/Animal, method = "ML")  
##  
## Quantile = 2.5691  
## 95% family-wise confidence level  
##  
##  
## Linear Hypotheses:  
##  
## Estimate lwr upr  
## kangaroo_testicle ~ stick_insect == 0 -3.8750 -6.8423 -0.9077  
## fish_eye ~ stick_insect == 0 -4.0000 -6.9673 -1.0327  
## witchetty_grub ~ stick_insect == 0 -2.3750 -5.3423 0.5923  
## fish_eye ~ kangaroo_testicle == 0 -0.1250 -3.0923 2.8423  
## witchetty_grub ~ kangaroo_testicle == 0 1.5000 -1.4673 4.4673  
## witchetty_grub ~ fish_eye == 0 1.6250 -1.3423 4.5923
```

$$\omega^2 = \frac{\left[\frac{k-1}{nk} (MS_M - MS_R) \right]}{MS_R + \frac{MS_B - MS_R}{k} + \left[\frac{k-1}{nk} (MS_M - MS_R) \right]}.$$

Für gegebene Kontraste kann man ausrechnen:

$$r = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + df}}.$$

Faktorielle (unabhängige) ANOVA

Beispiel

Wenn im Versuch mehr als zwei unabhängige Variable vorkommen, nennt man das faktorelles Design.

Man will die Wirkungs des Alkohols auf die wahrgenommene Attraktivität des jeweils anderen Geschlechts

Table 5: Attraktivität-Datensatz [A. Field]

gender	alcohol	attractiveness	alcohol1
Female	None	65	None
Female	None	70	None
Female	None	60	None
Female	None	60	None
Female	None	60	None
Female	None	55	None
Female	None	60	None
Female	None	55	None
Female	2 Pints	70	2 Pints
Female	2 Pints	65	2 Pints
Female	2 Pints	60	2 Pints
Female	2 Pints	70	2 Pints
Female	2 Pints	65	2 Pints
Female	2 Pints	60	2 Pints
Female	2 Pints	60	2 Pints

Beispiel

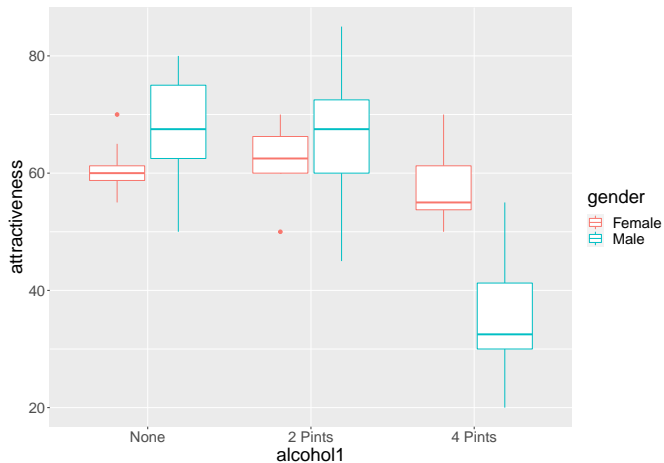
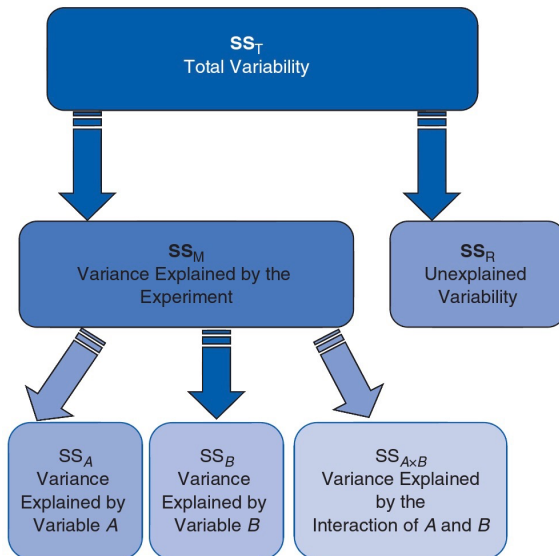


Figure 5: Attraktivität-Data [A. Field]

Zerlegung der Varianzen



Haupteffekt von Geschlecht

```
by(df$attr, df$gender, stat.desc)
```

```
## df$gender: Female
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
## 24.0000000 0.0000000 0.0000000 50.0000000 70.0000000 20.0000000
##      sum      median      mean  SE.mean CI.mean.0.95      var
## 1445.0000000 60.0000000 60.2083333  1.2937687  2.6763646 40.1721014
##   std.dev  coef.var
##   6.3381465  0.1052703
## -----
## df$gender: Male
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
## 24.0000000 0.0000000 0.0000000 20.0000000 85.0000000 65.0000000
##      sum      median      mean  SE.mean CI.mean.0.95      var
## 1355.0000000 60.0000000 56.4583333  3.7768263  7.8129606 342.3460145
##   std.dev  coef.var
##   18.5025948  0.3277212
```

Haupteffekt von Alkohol

```
by(df$attr, df$alcohol, stat.desc)
```

```
## df$alcohol: 2 Pints
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##  16.000000  0.000000  0.000000  45.000000  85.000000  40.000000
##   sum      median      mean  SE.mean CI.mean.0.95  var
## 1035.000000  65.000000  64.687500  2.4777657  5.2812326  98.2291667
##   std.dev  coef.var
##   9.9110628  0.1532145
## -----
## df$alcohol: 4 Pints
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##  16.000000  0.000000  0.000000  20.000000  70.000000  50.000000
##   sum      median      mean  SE.mean CI.mean.0.95  var
##  745.000000  50.000000  46.562500  3.5858155  7.6429849  205.7291667
##   std.dev  coef.var
##  14.3432621  0.3080432
## -----
## df$alcohol: None
##   nbr.val  nbr.null  nbr.na      min      max      range
##  16.000000  0.000000  0.000000  50.000000  80.000000  30.000000
##   sum      median      mean  SE.mean CI.mean.0.95  var
## 1020.000000  62.500000  63.750000  2.116404  4.511009  71.666667
##   std.dev  coef.var
##   8.465617  0.132794
```

Haupteffekt von Interaktion

```
by(df$attr, list(df$alcohol, df$gender), stat.desc)
```

```
## : 2 Pints
## : Female
##   nbr.val   nbr.null   nbr.na      min      max      range
##   8.0000000 0.0000000 0.0000000 50.0000000 70.0000000 20.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean CI.mean.0.95  var
## 500.0000000 62.5000000 62.5000000 2.3145502 5.4730417 42.8571429
##   std.dev   coef.var
##   6.5465367 0.1047446
## -----
## : 4 Pints
## : Female
##   nbr.val   nbr.null   nbr.na      min      max      range
##   8.0000000 0.0000000 0.0000000 50.0000000 70.0000000 20.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean CI.mean.0.95  var
## 460.0000000 55.0000000 57.5000000 2.5000000 5.9115606 50.0000000
##   std.dev   coef.var
##   7.0710678 0.1229751
## -----
## : None
## : Female
##   nbr.val   nbr.null   nbr.na      min      max      range
##   8.0000000 0.0000000 0.0000000 55.0000000 70.0000000 15.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean CI.mean.0.95  var
## 485.0000000 60.0000000 60.6250000 1.75191222 4.14261412 24.55357143
##   std.dev   coef.var
##   4.95515604 0.08173453
## -----
## : 2 Pints
## : Male
##   nbr.val   nbr.null   nbr.na      min      max      range
##   8.0000000 0.0000000 0.0000000 45.0000000 85.0000000 40.0000000
##   sum      median      mean      SE.mean CI.mean.0.95  var
## 535.0000000 67.5000000 66.8750000 4.4257263 10.4651798 156.6964286
##   std.dev   coef.var
##   12.5178444 0.1871827
## -----
## : 4 Pints
## : Male
##   nbr.val   nbr.null   nbr.na      min      max      range
```

Interaktionen

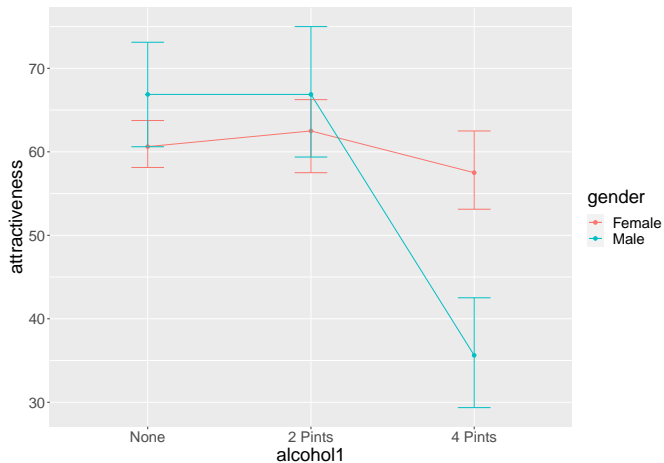


Figure 7: Attraktivität-Data [A. Field]

Leven-Test

Nicht signifikante Test bedeuten die Erfüllung der Anforderungen – Homogenität der Varianz.

```
library(car)
```

```
## Loading required package: carData
```

```
leveneTest(df$attractiveness, df$gender)
```

```
## Warning in leveneTest.default(df$attractiveness, df$gender): df$gender coerced  
## to factor.
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
```

```
##      Df F value Pr(>F)
```

```
## group 1 19.979 5.08e-05 ***
```

```
##      46
```

```
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
leveneTest(df$attractiveness, df$alcohol)
```

```
## Warning in leveneTest.default(df$attractiveness, df$alcohol): df$alcohol coerced  
## to factor.
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
```

```
##      Df F value Pr(>F)
```

```
## group 2 2.3238 0.1095
```

```
##      45
```

```
leveneTest(df$attractiveness, interaction(df$alcohol, df$gender))
```

```
## Levene's Test for Homogeneity of Variance (center = median)
```

```
##      Df F value Pr(>F)
```

```
## group 5 1.4252 0.2351
```

```
##      42
```

► Für *alcohol*

```
##           [,1] [,2]  
## 2 Pints   -2    0  
## 4 Pints    1   -1  
## None      1    1
```

► Für *gender*

```
##           [,1]  
## Female   -1  
## Male     1
```


ANOVA

```
model <- aov(attractiveness ~ alcohol*gender, data = df)
Anova(model, type = "III")
```

```
## Anova Table (Type III tests)
##
## Response: attractiveness
##           Sum Sq Df F value    Pr(>F)
## (Intercept) 163333  1 1967.0251 < 2.2e-16 ***
## alcohol      3332   2  20.0654 7.649e-07 ***
## gender       169   1   2.0323  0.1614
## alcohol:gender 1978  2  11.9113 7.987e-05 ***
## Residuals    3487 42
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
summary.lm(model)
```

```
##
## Call:
## aov(formula = attractiveness ~ alcohol * gender, data = df)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -21.875  -5.625  -0.625   5.156  19.375
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    58.333     1.315  44.351 < 2e-16 ***
## alcohol1       -3.177     0.930   -3.416  0.00142 **
## alcohol2        8.594     1.611   5.335  3.57e-06 ***
## gender1        -1.875     1.315   -1.426  0.16138
## alcohol1:gender1 -2.031     0.930   -2.184  0.03459 *
## alcohol2:gender1  7.031     1.611   4.365  8.12e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 9.112 on 42 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6111, Adjusted R-squared:  0.5648
## F-statistic: 13.2 on 5 and 42 DF, p-value: 9.609e-08
```